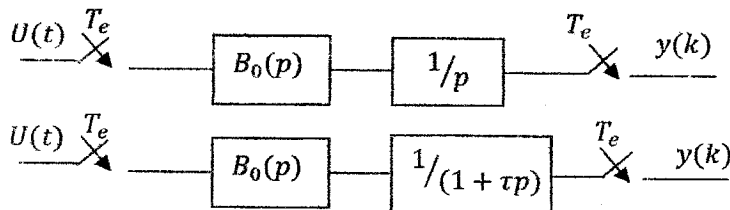


Série de TD N° 3

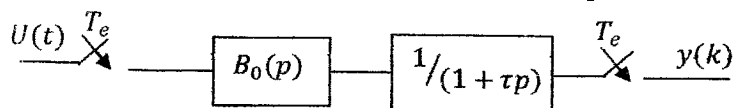
Exercice 1

Donner les transmittances (fonction de transfert) en Z correspondantes aux schémas suivants :



Exercice 2

Soit le système du premier ordre, échantillonné bloqué :



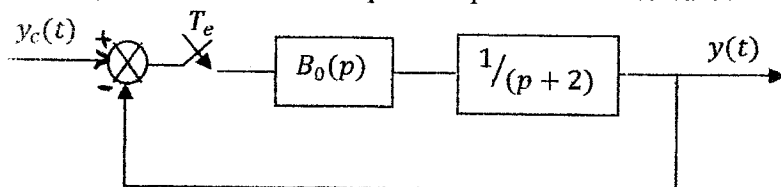
Donner l'équation aux récurrences du système qui relie $y(k)$ à $u(k)$.

Exercice 3

- 1) Calculer en utilisant la table, la TZ d'un système composé d'un premier ordre $\frac{1}{p+1}$ et d'un bloqueur d'ordre zéro.
- 2) Donner la réponse du système à un échelon.

Exercice 4

Soit le système échantillonné représenté par le schéma suivant :

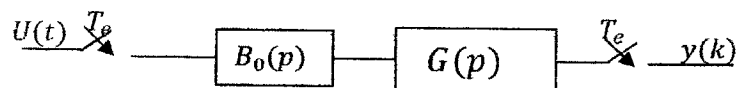


$B_0(p)$ est un bloqueur d'ordre zéro, et le système est échantillonné avec une période $T_e=0.1s$.

- 1) Calculer la fonction de transfert échantillonné de ce système en boucle fermée.
- 2) Calculer $y(kT_e)$, le système étant soumis à un échelon unitaire à l'entrée et $y(0)=0$.
- 3) Donner une représentation de $y(kT_e)$.

Exercice 5

Calculer la fonction de transfert $y(z)/u(z)$.



Pour :

- 1) $G(p) = 5/(1 + 2p)$

2) $G(p) = \frac{5}{p(1+2p)}$

3) $G(p) = \frac{1}{(0.694p^2 + 1.166p + 1)}$

Donner le gain statique et les pôles Zi.

Exercice 6

Un système échantillonné a pour fonction de transfert : $G(Z) = \frac{K(z+1)}{z^2 - 1.4z + 0.48}$ où K est une constante.

- Ecrire l'équation aux différences qui relie les signaux d'entrée $e(k)$ et de sortie $s(k)$.
- Etablir l'expression du signal de sortie en fonction de k lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

Exercice 7

On étudie l'équation récurrente : $y(k) = x(k) + 0.2y(k-1) + 0.15y(k-2)$.

- donner l'expression de la fonction de transfert $G(z) = Y(z)/X(z)$. Quels sont les pôles de $G(z)$?
- donner l'expression générale de $y(k)$ en fonction de k lorsque :
 - $x(k)$ est l'impulsion de Dirac.
 - $x(k)$ est l'échelon unité.

Exercice supplémentaire

Un moteur est caractérisé par sa fonction de transfert $T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$, où $\Omega(p)$ est la transformée de Laplace de la vitesse de rotation, τ est la constante du temps mécanique du système.

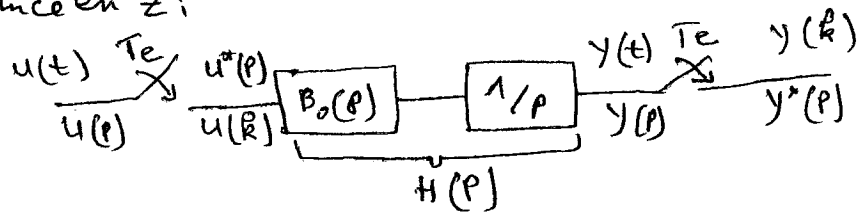
On désire commander ce moteur par un calculateur pour obtenir un asservissement de vitesse.

- sachant que $K=30\text{rad/s.V}$ et que $\tau=10\text{ms}$.
 - Proposer une valeur de fréquence d'échantillonnage.
 - Calculer alors la fonction de transfert de $G(z)$ de ce système accompagnée d'un BOZ.
- Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système en boucle fermée à retour unitaire. Ce système est-il stable ?
- Si l'on effectue un retour en continu, on aurait la fonction de transfert : $H(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)}$.
 - Quelle serait sa constante de temps ? la période d'échantillonnage choisie précédemment est-elle toujours adaptée ? sinon, proposer une nouvelle période d'échantillonnage et recalculer la fonction de transfert $G(z)$ échantillonnée en BO puis $H(z)$ en BF (le retour se fait en numérique).
 - Comparer cette dernière fonction de transfert avec celle qu'on aurait obtenue en échantillonnant $H(p)$.

Exo ①:

les transmittance en z :

①



$$y^*(p) = H^*(p) \cdot u^*(p) = \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{p} \right\}^* \cdot u^*(p)$$

$$Tz \rightarrow y(z) = u(z) \cdot Tz \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{p} \right\} ; B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

$$\begin{aligned} \text{alors: } H(z) &= Tz \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{p} \right\} = Tz \left\{ \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \cdot \frac{1}{p} \right\} \\ &= Tz \left\{ (1 - e^{-pT_e}) \cdot \frac{1}{p^2} \right\} = Tz \left\{ 1 - e^{-pT_e} \right\} \cdot Tz \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} \end{aligned}$$

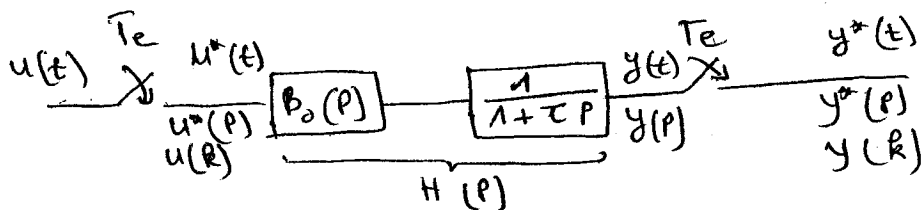
$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} \quad (\text{selon la Table de } Tz)$$

$$\rightarrow H(z) = (1 - z^{-1}) \frac{T_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

donc

$$y(z) = u(z) \cdot \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Rightarrow \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \left(\text{est la transmittance en } z \text{ (ou Fonction de transfert)} \right)$$

②



$$y^*(p) = H^*(p) \cdot u^*(p) = \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{1 + Tp} \right\}^* \cdot u^*(p)$$

$$Tz \rightarrow y(z) = H(z) \cdot u(z) = Tz \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{1 + Tp} \right\} \cdot u(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= Tz \left\{ \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \cdot \frac{1}{1 + Tp} \right\} = Tz \left\{ (1 - e^{-pT_e}) \cdot \frac{1}{p(1 + Tp)} \right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{1}{p(Tp + 1)} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{T_e}{p(p + \frac{1}{T_e})} \right\} ; a = \frac{1}{T_e} \end{aligned}$$

on utilise la Table:

$$\mathcal{TZ} \left\{ \frac{1/c}{p(p+1/c)} \right\} = \frac{z(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})}{(z-1)(z - e^{-\frac{1}{c}T_e})}$$

d'où $H(z) = \frac{(z-1)}{z} \cdot \frac{z(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})}{(z-1)(z - e^{-\frac{1}{c}T_e})} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{c}T_e}}{z - e^{-\frac{1}{c}T_e}}$

alors: $Y(z) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{c}T_e}}{z - e^{-\frac{1}{c}T_e}} U(z) \rightarrow \boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{c}T_e}}{z - e^{-\frac{1}{c}T_e}}}$ (transmittance en z)

Exo 2

La transmittance en z du syst est donnée juste avant.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{c}T_e}}{z - e^{-\frac{1}{c}T_e}} \xrightarrow[\text{aux récurrence}]{\text{équation}} \text{est déduite à partir:}$$

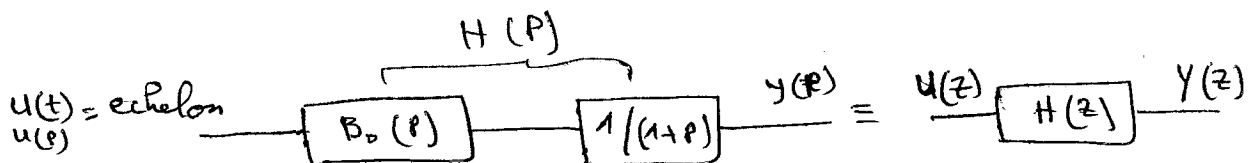
$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{z^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})}{z^{-1}(z - e^{-\frac{1}{c}T_e})} \quad (\text{remettre la transmittance en } z^{-1}) \\ &= \frac{z^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})}{(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e}z^{-1})} \end{aligned}$$

d'où: $Y(z)(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e}z^{-1}) = U(z)[z^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})]$

$\mathcal{TZ}^{-1} \left\{ \begin{aligned} Y(z) - e^{-\frac{1}{c}T_e}z^{-1}Y(z) &= (1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})z^{-1}U(z) \\ \rightarrow Y(k) - e^{-\frac{1}{c}T_e}Y(k-1) &= (1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})U(k-1) \end{aligned} \right.$

d'où: $\boxed{Y(k) = e^{-\frac{1}{c}T_e}Y(k-1) + (1 - e^{-\frac{1}{c}T_e})U(k-1)}$ (est l'équation aux récurrence qui relie $Y(k)$ à $U(k)$)

Exo 3



$$\begin{aligned} \mathcal{TZ} \{H(p)\} &= \mathcal{TZ} \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{1+p} \right\} = \mathcal{TZ} \left\{ \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \cdot \frac{1}{1+p} \right\} = \mathcal{TZ} \left\{ (1 - e^{-pT_e}) \cdot \frac{1}{p(p+1)} \right\} \\ &= \mathcal{TZ} \{1 - e^{-pT_e}\} \cdot \mathcal{TZ} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} \right\} = (1 - z^{-1}) \frac{z(1 - e^{-T_e})}{(z-1)(z - e^{-T_e})} \end{aligned}$$

$$\mathcal{TZ} \{H(p)\} = \frac{(z-1)}{z} \frac{z(1 - e^{-T_e})}{(z-1)(z - e^{-T_e})} = \frac{1 - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e}} = H(z)$$

Réponse du syst à un échelon unité.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e}} \rightarrow Y(z) = \frac{1 - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e}} U(z); \quad U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} (1 - e^{-T_e})}{(1 - e^{-T_e} z^{-1})} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z (1 - e^{-T_e})}{(z - 1)(z - e^{-T_e})}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1 - e^{-T_e}}{(z - 1)(z - e^{-T_e})} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - e^{-T_e}} \quad (\text{décomposition en éléments simples})$$

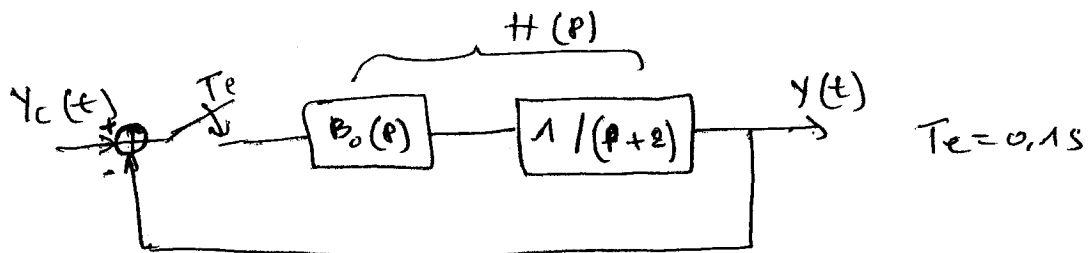
$$A = (z - 1) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{(1 - e^{-T_e}) \cancel{(z - 1)}}{\cancel{(z - 1)} (z - e^{-T_e})} \Big|_{z=1} = 1$$

$$B = z - e^{-T_e} \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=e^{-T_e}} = \frac{(1 - e^{-T_e}) (z - e^{-T_e})}{(z - 1)(z - e^{-T_e})} \Big|_{z=e^{-T_e}} = -1$$

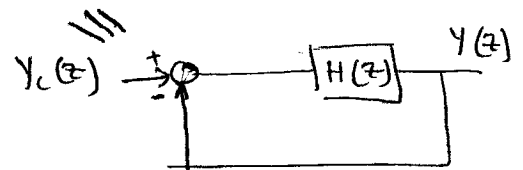
d'où: $\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z - 1)} - \frac{1}{z - e^{-T_e}} \rightarrow Y(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-T_e}}$

selon la table: $\boxed{y(k) = 1 - e^{-kT_e}}$ (est la réponse du syst à une entrée échelon)

Exo 4:



$$FTBF(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} = \frac{Y(z)}{Y_c(z)}$$



$$H(z) = Tz \left\{ B_0(p) \cdot \frac{1}{p+2} \right\} = Tz \left\{ \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \cdot \frac{1}{p+2} \right\}$$

$$= Tz \{ 1 - e^{-pT_e} \} \cdot Tz \left\{ \frac{1}{p(p+2)} \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{1}{p(p+2)} \right\}$$

$$Tz \left\{ \frac{1}{p(p+2)} \right\} = Tz \left\{ \frac{1}{2} \frac{2}{p(p+2)} \right\} = \frac{1}{2} Tz \left\{ \frac{2}{p(p+2)} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z(1 - e^{-2T_e})}{(z - 1)(z - e^{-2T_e})}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \frac{z(1 - e^{-2T_e})}{2(z - 1)(z - e^{-2T_e})} = \frac{\cancel{(z - 1)}}{2} \cdot \frac{z(1 - e^{-2T_e})}{\cancel{z} \cancel{(z - 1)} (z - e^{-2T_e})} = \frac{1 - e^{-2T_e}}{2(z - e^{-2T_e})}$$

donc: $FTBF(z) = \frac{(1 - e^{-2T_e})/2(z - e^{-2T_e})}{1 + (1 - e^{-2T_e})/2(z - e^{-2T_e})} = \frac{1 - e^{-2T_e}}{2(z - e^{-2T_e}) + (1 - e^{-2T_e})}$

$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = FTBF(z) = \frac{1 - e^{-2T_e}}{2z + 1 - e^{-2T_e}}$ Pour $T_e = 0,1s \rightarrow FTBF(z) = \frac{0,09}{z - 0,73}$

• calcul de $y(kT_e)$? pour $y_c(z) \rightarrow$ échelon unitaire

$Y(z) = \frac{1 - e^{-2T_e}}{2z + 1 - e^{-2T_e}} \cdot Y_c(z) = \frac{1 - e^{-2T_e}}{2z + 1 - e^{-2T_e}} \cdot \frac{z}{z - 1}$; $T_e = 0,1s$

$Y(z) = \frac{0,09}{z - 0,73} \cdot \frac{z}{z - 1} = \frac{0,09z}{(z - 0,73)(z - 1)}$

• méthode des résidus (pôles simples) $\{z_1 = 0,73, z_2 = 1\}$

$y(kT_e) = \text{rés}_1 + \text{rés}_2$
 $z_1 = 0,73 \quad z_2 = 1$

* $\text{rés}_1 = (z - 0,73) Y(z) z^{k-1} \Big|_{z=0,73} = \frac{0,09z \cdot z^{k-1}}{z - 1} \Big|_{z=0,73} = \frac{0,09z^k}{z - 1} \Big|_{z=0,73}$

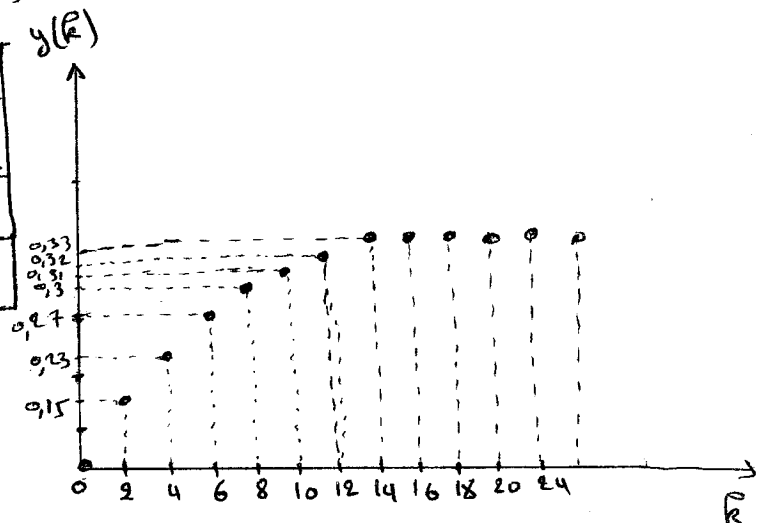
$\text{rés}_1 = -\frac{1}{3} (0,73)^k$

* $\text{rés}_2 = (z - 1) Y(z) z^{k-1} \Big|_{z=1} = \frac{0,09z^k}{z - 0,73} \Big|_{z=1} = \frac{1}{3} = 0,33$

$y(kT_e) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (0,73)^k \rightarrow$ réponse à un échelon unitaire

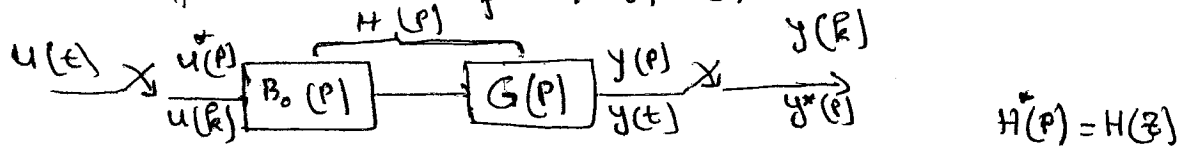
② Représentation de $y(kT_e) \approx y(k)$

k	0	2	4	6	8	10	12	14
y(k)	0	0,15	0,23	0,27	0,3	0,31	0,32	0,33
k	16	18	20	24	-	-	-	-
y(k)	0,33	0,33	0,33	0,33	-	-	-	-



Exo 5:

calcul de la fonction de transfert $Y(z)/U(z)$



$$Y^*(p) = U^*(p) \cdot [B_0(p) \cdot G(p)]^* \longrightarrow Y(z) = U(z) \cdot Tz \{ B_0(p) G(p) \}$$

$$H(z) = Tz \left\{ \frac{1 - e^{-pT_c}}{p} \cdot G(p) \right\} = Tz \left\{ (1 - e^{-pT_c}) \cdot \frac{G(p)}{p} \right\}$$

$$= Tz \{ (1 - e^{-pT_c}) \} \cdot Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

$$Y(z) = U(z) \cdot [(1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}] \rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Tz \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

o) Pour $G_1(p) = \frac{5}{1 + 2p}$

$$\rightarrow Tz \left\{ \frac{G_1(p)}{p} \right\} = Tz \left\{ \frac{5}{p(2p+1)} \right\} = Tz \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{p(p + \frac{1}{2})} \right\}$$

$$= Tz \left\{ 5 \cdot \frac{1/2}{p(p + \frac{1}{2})} \right\} = 5 \cdot Tz \left\{ \frac{1/2}{p(p + \frac{1}{2})} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{selon la} \\ \text{Table en } z \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow Tz \left\{ \frac{G_1(p)}{p} \right\} = 5 \cdot \frac{z(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(z-1)(z - e^{-\frac{1}{2}T_c})} = 5 \cdot \frac{z(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(z-1)(z - e^{-\frac{1}{2}T_c})}$$

$$\text{d'où } \frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{5z(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(z-1)(z - e^{-\frac{1}{2}T_c})} \right) = \frac{5(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(z - e^{-\frac{1}{2}T_c})}$$

Le gain statique d'un syst échantillonné est égal à la limite de $H(z)$

$$\text{quand } z \rightarrow 1 \quad K_{H(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{5(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(z - e^{-\frac{1}{2}T_c})} \right) = \frac{5(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})} = 5$$

Les pôles z_i : le syst $H(z) = \frac{5(1 - e^{-\frac{1}{2}T_c})}{(z - e^{-\frac{1}{2}T_c})}$ est de 1^{er} ordre
 \rightarrow présente un seul pôle $z = e^{-\frac{1}{2}T_c}$

$$G_2(p) = \frac{1}{0,694p^2 + 1,166p + 1} = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{p}{\omega_n} + 1}$$

$$= \frac{k \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$$

(5)

$\zeta \rightarrow$ coéf d'amortissement
 $\omega_n \rightarrow$ pulsation propre du syst.

$\xi = 0,7 \rightarrow 0 < \xi < 1 \rightarrow$ le syst admet deux racines complexes de forme:

$$p_1 = -\xi \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} ; p_2 = -\xi \omega_n - j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$G_2(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$H(z) = \mathcal{TZ}\{B_0(p) \cdot G_2(p)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{TZ}\left\{\frac{G_2(p)}{p}\right\}$$

$$\mathcal{TZ}\left\{\frac{G_2(p)}{p}\right\} = \frac{K \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} \rightarrow \text{méthode des résidus}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{TZ}\left\{\frac{K \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}\right\} = \frac{b_1(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \mathcal{TZ} \text{ du } z^{\text{in}} \\ \text{ordre} \\ \text{échantillonné} \end{array}$$

avec: $z_1 = e^{p_1 T_e}, z_2 = e^{p_2 T_e} = e^{-p_1 T_e} \quad [z_2 = z_1^*] \rightarrow \text{conjugué de } z_1$

• pôles en $z \rightarrow z_0 = -\frac{b_0}{b_1}$

$$\begin{cases} b_0 = e^{-\xi \omega_n T_e} + e^{-\xi \omega_n T_e} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} T_e) - \cos(\sqrt{1 - \xi^2} T_e) \right] \\ b_1 = 1 - e^{-\xi \omega_n T_e} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} T_e) + \cos(\sqrt{1 - \xi^2} T_e) \right] \end{cases}$$

gain statique 1: $K_{G_z}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{b_1(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_2)} \right) = \frac{b_1(1 - z_0)}{(1 - z_1)(1 - z_2)} = \frac{b_1(1 - z_0)}{(1 - e^{p_1 T_e})(1 - e^{p_2 T_e})}$

x06

$$G(z) = \frac{K(z + 1)}{z^2 - 1,4z + 0,48}$$

1) l'équation aux différences (aux récurrences) qui relie $e(k)$ et $s(k)$

$$E(z) \xrightarrow{G(z)} S(z)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K(z + 1)}{z^2 - 1,4z + 0,48} = \frac{K(z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,4z^{-1} + 0,48z^{-2}}$$

$$S(z) [1 - 1,4z^{-1} + 0,48z^{-2}] = E(z) [Kz^{-1} + Kz^{-2}]$$

$$S(z) - 1,4z^{-1}S(z) + 0,48z^{-2}S(z) = Kz^{-1}E(z) + Kz^{-2}E(z)$$

$$\begin{aligned} S(k) - 1,4S(k-1) + 0,48S(k-2) &= K e(k-1) + K e(k-2) \\ S(k) &= 1,4S(k-1) - 0,48S(k-2) + K e(k-1) + K e(k-2) \end{aligned}$$

Pour $e(k)$ est une entrée échelon

forme factorisée de $G(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - 0,8)(z - 0,6)} = \frac{S(z)}{E(z)}$

$$\rightarrow S(z) = G(z) \cdot E(z)$$

$v(0) = 0$
 $v'(0) = 1$
 échelon

$$S(z) = \frac{K(z+1)}{(z-0.8)(z-0.6)} \cdot \frac{z}{(z-1)}$$

$$S(z) = \frac{Kz(z+1)}{(z-1)(z-0.8)(z-0.6)} \xrightarrow{Tz^{-1}} \text{méthode des résidus}$$

pôles simples ($z_1=1, z_2=0.8, z_3=0.6$)

$$S(k) = \underset{z_1}{\text{rés}_1} + \underset{z_2}{\text{rés}_2} + \underset{z_3}{\text{rés}_3} \quad \left(\text{rés}_i = \left[(z-z_i) S(z) \cdot z^{k-1} \right]_{z=z_i} \right)$$

$$\underset{z_1}{\text{rés}_1} = \left. \frac{K(z+1)z^k}{(z-0.8)(z-0.6)} \right|_{z=1} = 25K$$

$$\underset{z_2}{\text{rés}_2} = \left. \frac{K(z+1)z^k}{(z-1)(z-0.6)} \right|_{z=0.8} = -45K(0.8)^k$$

$$\underset{z_3}{\text{rés}_3} = \left. \frac{K(z+1)z^k}{(z-1)(z-0.8)} \right|_{z=0.6} = 20K(0.6)^k$$

$$S(k) = K \left[25 - 45(0.8)^k + 20(0.6)^k \right] \Leftrightarrow \text{Réponse du syst à une entrée échelon.}$$

Exo 2:

$$y(k) = x(k) + 0.2y(k-1) + 0.15y(k-2) \quad \text{--- ①} \quad \text{équation aux récurrence}$$

a) calcul de $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$?

$$\text{① } Tz \rightarrow \begin{cases} y(k) - 0.2y(k-1) - 0.15y(k-2) = x(k) \\ Y(z) - 0.2z^{-1}Y(z) - 0.15z^{-2}Y(z) = X(z) \\ Y(z)[1 - 0.2z^{-1} - 0.15z^{-2}] = X(z) \end{cases}$$

$$\text{d'où } G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.2z^{-1} - 0.15z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.2z - 0.15}$$

$$D(z) = z^2 - 0.2z - 0.15 \rightarrow D(z) = (z - 0.5)(z + 0.3)$$

$$\text{Pôles} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0.5, z_2 = -0.3 \end{cases}$$

$$\text{b) } y(k) \rightarrow \text{pour } x(k) \text{ impulsions de Dirac} \rightarrow X(z) = 1$$

$$G(z) = Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.3)} \xrightarrow{\text{méthode des résidus}} y(k) = \dots$$

$$\text{c) } y(k) \rightarrow \text{pour } x(k) \text{ échelon unité} \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.3)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{(z-1)(z-0.5)(z+0.3)} \xrightarrow{Tz^{-1}} y(k)$$

$$y(k) = \dots \quad (\text{méthode des résidus})$$

TD Auto 503

Solution de l'exo Sup de la série N°3

Un moteur est caractérisé par sa fonction de transfert

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Où $\Omega(p)$ est la transformée de Laplace de la vitesse de rotation, τ est la constante de temps mécanique du système (on néglige la constante de temps électrique).

On choisit a priori une période d'échantillonnage T_e telle que :

$$\frac{\tau}{4} < T_e < \tau \quad (\text{pour le 1er ordre})$$

un choix Pour $T_e = 5 \text{ ms}$, la fréquence d'échantillonnage sera $F_e = 200 \text{ Hz}$.

La transformée en Z du système accompagné de son Bloqueur d'Ordre Zéro sera :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot TZ \left(\frac{G(p)}{p} \right) = K \frac{1 - a}{z - a}$$

Avec $a = e^{-T_e/\tau}$. L'application numérique donne :

$$G(z) = \frac{11.7}{z - 0.61}$$

En boucle fermée, retour unitaire, on a un système de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{11.7}{z - 11} \quad |z| = 11 > 1$$

Le pole de ce système est de module supérieur à 1. Ce système est instable. Or, en continu, un premier ordre n'est jamais instable. La période d'échantillonnage est mal choisie. Il faut en fait la comparer avec la constante de temps de ce système en boucle fermée. En BF (continue), on aurait

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K'}{1 + \tau' p} = \frac{\left(\frac{K}{1 + K} \right)}{1 + \left(\frac{\tau}{1 + K} \right) p}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau' = \frac{\tau}{1 + K} = 0.32 \text{ ms. On choisit la période d'échantillonnage telle que :} \\ K' = \frac{K}{1 + K} \end{array} \right.$$

$$\frac{\tau'}{4} < T_e < \tau'$$

Par exemple, $T_e = 0.25 \text{ ms}$; ce qui fait une fréquence $F_e = 4 \text{ kHz}$. La nouvelle fonction de transfert $G(z)$ qui dépend de la période d'échantillonnage est :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot TZ \left(\frac{G(p)}{p} \right) = K \frac{1 - a}{z - a}$$

Avec $a = e^{-T_e/\tau}$. L'application numérique donne :

$$G(z) = \frac{0.74}{z - 0.97}$$

ce qui donne, en BF :

$$H(z) = \frac{0.74}{z - 0.235}$$

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

$$|z| < 1 \rightarrow z = 0.235 \rightarrow z \text{ est dans le cercle unité}$$

→ Cette fois, le système est stable en Boucle fermée.