



Examen: Session ordinaire S₃

Exercice 01 :

Considérons le système du 2nd ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases} \quad \text{avec} \quad y = x_1$$

Et le critère à minimiser :

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x_1^2 + 2\sqrt{\alpha}x_1x_2 + 4x_2^2 + \frac{1}{2}u^2)dt$$

Avec α est une certaine constante.

- 1) Donner la représentation d'état du système en déterminant les matrices A et B
- 2) Donner la forme du critère de performance pour la commande optimale LQR.
- 3) Déterminer les matrices Q et R et puis trouver l'intervalle d'appartenance de α .
- 4) Déterminer l'équation de Ricatti.
- 5) Déterminer la loi de commande LQR.

Exercice 02 :

On considère un système dynamique régi par l'équation d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{où } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- 1) Calculer la matrice de contrôlabilité du système et montrer qu'il commandable.
- 2) Déterminer le retour d'état K nécessaire pour imposer -2 et -5 comme pôles du système bouclé.
- 3) Déterminer le dénominateur de la fonction de transfert en boucle ferme (BF) pour un retour d'état $K = [2 \quad -10]$ puis donner la pulsation propre ω_n et le dépassement ξ .
- 4) Pour améliorer les performances du système de commande, on propose d'utiliser l'action intégrale suivant :

Correction d'examen

Exo 1

1) la représentation d'état du système: (1 pt)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} U$$

2) la forme du critère de performance pour LQR (1 pt)

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt$$

3) les matrices Q et R. $Q = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$, $R = \frac{1}{2}$ (1 pt)

* l'intervalle d'appartenance de α . $\alpha \in [0, 8]$ (1 pt)

4) l'équation de Riccati. (1,5)

$$PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2P_1^2 & 2P_1P_2 \\ 2P_1P_2 & 2P_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1 = -\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \\ P_2 = 1 \\ P_3 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} + 2\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

5) loi de commande LQR (0,5 pt)

$$U = -K X(t) \text{ avec } K = R^{-1} B^T P$$

$$U = 2 x_1(t) + 2\sqrt{3} x_2(t)$$

1) le degré relatif de l'axe est $\lambda = r = 2$. (1. pt)

2) la surface de glissement de Slone. (1. pt)

$$S = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) e = e + \gamma e = x_2 - \dot{y}_1 + \gamma(x_1 - y_1)$$

$$\text{avec } e = y - y_1 = x_1 - y_1$$

3) l'axe de commande par mode glissant (2 pt)

$$\text{on a: } \dot{S} = -k \operatorname{sign}(S) \Rightarrow x_1 x_2 + \gamma \cos(x_2) - \ddot{y}_1 + \gamma(x_1 - y_1) = -k \operatorname{sign}(S)$$

$$U = \frac{-k \operatorname{sign}(S)}{\gamma_1 + \gamma \dot{y}_1 - x_1 x_2 - \gamma x_2} + \frac{\cos(x_2)}{\cos(x_2)}$$

4) la robustesse de la commande (2 pt)
- considérons la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2} S^2$.

$$\dot{V} = S \dot{S} = S(x_1 x_2 + \gamma \cos(x_2) + d - \ddot{y}_1 + \gamma(x_1 - y_1))$$

En remplaçant U on trouve

$$\dot{V} = S(-k |S| + S(\cos(x_2) \sin(x_2)))$$

$$\dot{V} \leq -k |S| + |S| \times 100 \Rightarrow \dot{V} \leq -(k - 100) |S|$$

Si on choisit $k > 100$, on peut conclure que $\dot{V} \leq 0$
 \Rightarrow cette commande est asymptotique !