

## **BUKTI BAHWA AKAR DUA BILANGAN IRASIONAL**

**Pertanyaan dari (email)** : M syaifuddin dan Ayu Astuti

Pertanyaannya sama, yaitu :

*Bukti bahwa akar 2 adalah bilangan irasional !*

### **PEMBUKTIAN :**

Disini, kita akan membuktikan ke-irasionalan akar 2 dengan 3 cara , yaitu :

#### **CARA 1**

Andaikan  $\sqrt{2}$  adalah bilangan rasional. Berarti  $\sqrt{2}$  dapat disajikan dalam bentuk pecahan, yaitu :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Dengan a dan b adalah bilangan bulat serta b tidak sama dengan 0. Tanpa mengurangi keumuman bukti, andaikan bahwa a dan b saling prima atau faktor persekutuan terbesarnya adalah 1. Sehingga berlaku :

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Berarti  $a^2$  adalah bilangan genap, akibatnya a juga genap. Karena a genap berarti b ganjil, sebab a dan b saling prima. Berarti a dapat disajikan dalam bentuk

$$a = 2k$$

Untuk suatu k bilangan bulat. Berarti belaku

$$2b^2 = a^2$$

$$2b^2 = (2k)^2$$

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

Didapatkan  $b^2$  juga genap, sehingga b juga genap. Terdapat KONTRADIKSI dengan hasil b ganjil pada pernyataan sebelumnya. Berarti pengandaian  $\sqrt{2}$  adalah bilangan rasional SALAH atau haruslah  $\sqrt{2}$  bilangan irasional.

#### **CARA 2**

Pada cara yang kedua ini kita tetap menggunakan metode pembukian secara kontradiksi, namun berbeda dari cara sebelumnya, disini kita andaikan akar dua dapat dituliskan dalam bentuk desimal yang terbagi dalam dua kasus. Lebih jelasnya sebagai berikut :

### KASUS 1

Andaikan  $\sqrt{2}$  dapat dinyatakan dalam bentuk desimal, misal  $\sqrt{2} = 1,abc$ . a, b dan c adalah bilangan bulat nonnegatif dengan c tidak sama dengan 0. Kalikan kedua ruas dengan 1000 kemudian kuadratkan, proses selengkapnya sebagai berikut :

$$\sqrt{2} = 1,abc$$

$$\sqrt{2} (1000) = 1,abc (1000)$$

$$(\sqrt{2} (1000))^2 = (1abc)^2$$

$$2 (1000000) = (1abc)^2$$

$$2000000 = (1abc)^2$$

Pada ruas kiri kita dapatkan bilangan yang berakhiran angka nol, ini tidak sesuai dengan ruas kanan karena di awal kita memisalkan c tidak sama dengan nol. berarti pengandaian bahwa  $\sqrt{2}$  dapat dinyatakan dalam bentuk desimal SALAH, jadi  $\sqrt{2}$  dapat dinyatakan dalam bentuk desimal akibatnya tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan atau dengan kata lain  $\sqrt{2}$  adalah bilangan irasional. Pengandaian dalam bentuk desimal lain akan menghasilkan kesimpulan yang sama.

### KASUS 2

Andaikan  $\sqrt{2}$  dapat dinyatakan dalam bentuk desimal berulang, misal  $\sqrt{2} = 1,abcabcabc \dots = 1,\overline{abc}$ . a, b dan c adalah bilangan bulat nonnegatif. Proses atau langkah selanjutnya sebagai berikut

$$\sqrt{2} = 1,abcabcabc \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + 0,abc + 0,000abc + 0,000000abc + \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} + \frac{abc}{10^6} + \frac{abc}{10^9} + \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} \left( 1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} (1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \dots)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} (1 + 10^{-3} + (10^{-3})^2 + \dots)$$

Dalam suatu teorema menyatakan

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Berarti di dapatkan

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} \left( \frac{1}{1-10^{-3}} \right)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} \right)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3} \left( \frac{1}{\frac{10^3 - 1}{10^3}} \right)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{abc}{10^3 - 1}$$

$$\sqrt{2} = \frac{(10^3 - 1) + abc}{10^3 - 1}$$

$$\sqrt{2}(10^3 - 1) = (10^3 - 1) + abc$$

$$\sqrt{2}(999) = (10^3 - 1) + abc$$

$$[\sqrt{2}(999)]^2 = [(10^3 - 1) + abc]^2$$

$$2(999)^2 = [(10^3 - 1) + abc]^2$$

Perhatikan pada ruas kiri, jika diproses lebih lanjut maka akan menghasilkan angka satuan 2. Ini berbeda dengan kanan yang angka satuannya hanyalah angka yang dihasilkan dari kuadrat suatu bilangan, nilainya yaitu salah satu diantara 0, 1, 4, 5, 6 atau 9. Berarti terjadi kontradiksi yang mengakibatkan pengandaian bahwa  $\sqrt{2}$  dapat dinyatakan dalam bentuk desimal berulang adalah SALAH. Berarti haruslah  $\sqrt{2}$  adalah bilangan irasional. Pengandaian dengan bentuk desimal yang lain akan menghasilkan kesimpulan yang sama.

### CARA 3 (GEOMETRI)

Sama seperti cara pertama. Andaikan  $\sqrt{2}$  adalah bilangan rasional. Berarti  $\sqrt{2}$  dapat disajikan dalam bentuk pecahan, yaitu :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

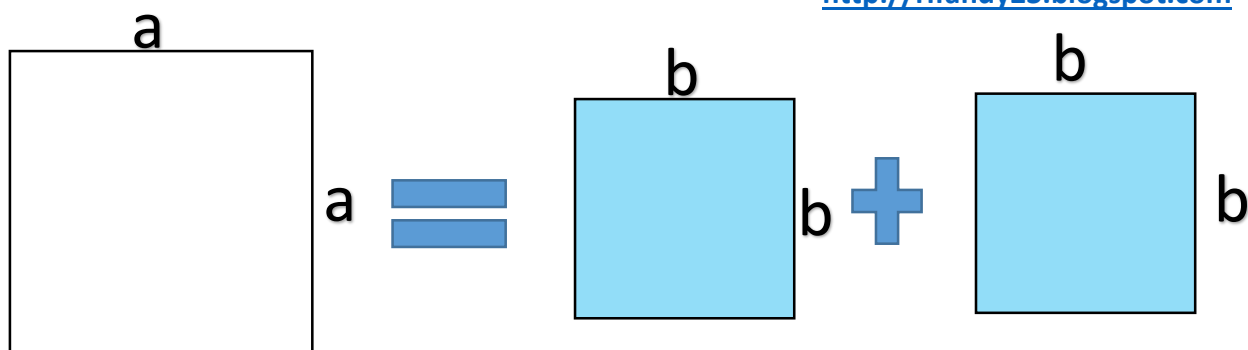
Dengan a dan b bilangan bulat serta b tidak sama dengan nol. Berarti didapatkan

$$2b^2 = a^2$$

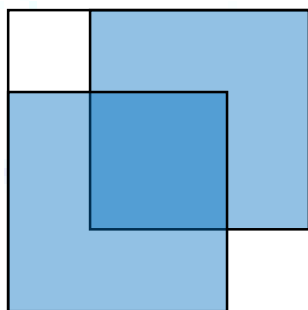
$$b^2 + b^2 = a^2$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat menggambarkan persegi dengan luas (a x a) dan persegi yang lebih kecil yaitu b x b. Dimana luas persegi besar sama dengan 2 kali luas persegi kecil.

Lebih jelasnya, perhatikan gambar



Asumsikan “a” adalah bilangan bulat terkecil yang memenuhi persamaan  $b^2 + b^2 = a^2$  untuk bilangan bulat “b” lainnya. Kemudian letakkan persegi biru dengan luas (b x b) diletakkan kedalam persegi putih yang luasnya (a x a) seperti pada gambar di bawah.



Pada gambar di atas dapat dilihat dengan jelas bahwa :

1. Terdapat area persegi biru (persegi kecil) yang beririsan satu sama lain
2. Terdapat pula area persegi putih (persegi besar) yang tidak tertutupi oleh persegi biru.

Dari kedua pernyataan di atas dapat di simpulkan bahwa luas daerah irisan dua persegi biru (persegi biru gelap) akan sama dengan luas wilayah persegi putih yang tidak tertutupi oleh persegi biru. Itu karena jumlah luas kedua persegi biru sama dengan luas persegi putih. Panjang sisi persegi biru gelap dan putih kecil haruslah bilangan bulat, karena dihasilkan dengan mengoperasikan bilangan bulat. Misalkan panjang sisi persegi biru gelap dan putih kecil masing-masing adalah p dan q. Jadi diperoleh persamaan :

$$q^2 + q^2 = p^2$$

Pada persamaan di atas diketahui bahwa p lebih kecil dari a, ini kontradiksi dengan asumsi bahwa “a” adalah bilangan bulat terkecil. Ini berarti pengandaian awal yang menyatakan  $\sqrt{2}$  adalah bilangan rasional TIDAK BENAR. Jadi haruslah  $\sqrt{2}$  irrasional.