

Université de Médéa	EFS1	Niveau: Master 1
Département: MI	Analyse fonctionnelle	Année: 2022/2023

Exercice 01 (10 points) ★

Soit l'espace de Banach: $l^\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ et } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, muni de la norme:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n|. \quad (1)$$

Considérons le sous-espace C_0 de l^∞ tel que $C_0 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0\}$. (C_0 est un espace de Banach pour la norme (1)).

Soit l'espace de Banach $l^1 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty\}$, muni de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

- Donner l'énoncé exact du théorème d'isomorphisme de Banach.
- Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l^1$, on considère l'opérateur $T_x : C_0 \rightarrow \mathbb{C}$, défini par:

$$T_x(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n.$$

- Montrer que T_x est une forme linéaire, continue sur C_0 , (c'est à dire que $T_x \in C'_0$) et montrer que $\|T_x\| = \|x\|_1$.
- on considère maintenant l'opérateur $A : l^1 \rightarrow C'_0$ défini par:

$$A(x) = T_x, \text{ pour tout } x \in l^1.$$

- Vérifier que A est isométrique, et en déduire $\|A\|$.
- En utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, montrer que A^{-1} est linéaire continu.

Exercice 02 (10 points) ★

Soit l'espace de Hilbert sur \mathbb{R} :

$$L^2([0, 1]) = \left\{ u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ est mesurable et } \int_0^1 |u(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx$ et la norme induite $\|u\| = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.
- calculer $\int_0^1 \sin^2(nx) dx$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers 0.

Université de Médéa	Corrigé de EFS1	Niveau: Master 1
Département: MI	Analyse fonctionnelle	Année: 2022/2023

Exercice 1

1) Le théorème d'isomorphisme de Banach:

Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E, F)$ et T est bijectif de E dans F .

Alors T^{-1} est linéaire continu de F dans E .

Remarquons que T_x est bien défini.

2) Montrons que T_x est une forme linéaire continue sur C_0 .

- la linéarité de T_x :

Soient $y, z \in C_0, \alpha \in \mathbb{C}$. On a:

$$T_x(y + \alpha z) = \sum_{n \geq 1} x_n(y_n + \alpha z_n) = \sum_{n \geq 1} x_n y_n + \alpha \sum_{n \geq 1} x_n z_n = T_x(y) + \alpha T_x(z).$$

- la continuité de T_x .

Soit $y \in C_0$. On a:

$$|T_x(y)| = \left| \sum_{n \geq 1} x_n y_n \right| \leq \sum_{n \geq 1} |x_n| |y_n| \leq \sum_{n \geq 1} |x_n| \|y\|_\infty = \|y\|_\infty \sum_{n \geq 1} |x_n| = \|x\|_1 \|y\|_\infty. \text{ Ce qui}$$

montre que T_x est continue et on a:

$$\|T_x\| \leq \|x\|_1. \quad (2)$$

Montrons que $\|T_x\| = \|x\|_1$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite $Y^N \in C_0$ par:

$$Y^N = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, 0, \dots),$$

avec

$$y_i = \begin{cases} \frac{\overline{x_i}}{|x_i|}, & \text{si } x_i \neq 0 \\ 0, & \text{si } x_i = 0, \end{cases}$$

de sorte que $x_i y_i = |x_i|$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\|Y^N\|_\infty \leq 1$ et $T_x(Y^N) = \sum_{k=1}^N |x_k|$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$.

On a:

$$\|T_x\| = \sup_{y \in C_0, \|y\|_\infty \leq 1} |T_x(y)| \geq |T_x(Y^N)| = \left| \sum_{k=1}^N x_k y_k \right| = \sum_{k=1}^N x_k \frac{\overline{x_k}}{|x_k|} = \sum_{k=1}^N \frac{|x_k|^2}{|x_k|} = \sum_{k=1}^N |x_k|, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

En faisant $N \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$\|T_x\| \geq \|x\|_1. \quad (3)$$

De (2) et (3), on conclut que

$$\|T_x\| = \|x\|_1. \quad (4)$$

3) $A : l^1 \rightarrow C'_0$ tel que $Ax = T_x$.

a) Montrons que A est isométrique, c.à.d $\|Ax\| = \|x\|$, pour tout $x \in l^1$.

Soit $x \in l^1$. On a:

$$\|Ax\| = \|T_x\| = \|x\| \text{ (d'après (4))}.$$

b) En utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, montrons que A^{-1} est linéaire continu.

Tout d'abord on a les deux espaces l^1 et C'_0 sont de Banach.

Ensuite, on montre que A est bijectif.

Montrons que A est injectif:

Soit $x \in l^1$. Comme A est linéaire car T_x est linéaire, supposons que $Ax = 0$ et on montre que $x = 0$.

$$Ax = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies \|x\| = 0 \implies x = 0.$$

D'où A est injectif.

Montrons que A est surjectif.

A est surjectif $\iff \forall g \in C'_0, \exists x \in l^1 : Ax = g$.

Soit $g \in C'_0$.

Soit $B = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ la famille dans C_0 définie par:

$$e_n = \delta_n^k = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k, \end{cases}$$

Donc si $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in C_0$, alors $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n e_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N y_n e_n$.

Comme $g \in C'_0$, alors g est continue, donc on a:

$$g(y) = g\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N y_n e_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} g\left(\sum_{n=1}^N y_n e_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N y_n g(e_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n g(e_n). \quad (5)$$

On pose $x = (g(e_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On montre que $x \in l^1$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (z^N) dans C_0 par:

$$z^N = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, 0, 0, \dots),$$

avec

$$z_i = \begin{cases} \frac{\overline{g(e_i)}}{|g(e_i)|}, & \text{si } g(e_i) \neq 0 \\ 0, & \text{si } g(e_i) = 0, \end{cases}$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\|z^N\| \leq 1 \text{ et } g(z^N) = g\left(\sum_{k=1}^N z_k e_k\right) = \sum_{k=1}^N z_k g(e_k) = \sum_{k=1}^N |g(e_k)|, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Comme g est continue, alors on a:

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^N |g(e_k)| = g(z^N) \leq \|g\| \|z^N\| \leq \|g\|.$$

Alors on en déduit que $x \in l^1$.

En vertu de (5), On a bien

$$A(x) = g.$$

D'où la surjectivité de A .

Finalement A est bijectif.

La conclusion:

A est linéaire continu, bijectif, alors d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, on conclut que A^{-1} est linéaire continu de C'_0 vers l^1 .

Exercice 2

$$L^2([0, 1]) = \left\{ u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ est mesurable et } \int_0^1 |u(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

1) Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

$$u_n \rightharpoonup 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, v) = 0, \quad \forall v \in L^2([0, 1]).$$

Soit $v \in L^2([0, 1])$. On a:

$$(u_n, v)_{L^2([0, 1])} = \int_0^1 u_n(x)v(x) dx = \int_0^1 \sin(nx)v(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} v(x) dx.$$

On fait un changement de variables $x = 2\pi y$, donc $dx = 2\pi dy$.

$$\text{Alors, } (u_n, v)_{L^2([0, 1])} = \frac{\pi}{i} \int_0^{\frac{1}{2\pi}} (e^{2in\pi y} - e^{-2in\pi y}) v(2\pi y) dy.$$

On a: $v \in L^2([0, \frac{1}{2\pi}])$, donc $v \in L^1([0, \frac{1}{2\pi}])$. Alors en appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue, on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{i} \int_0^{\frac{1}{2\pi}} (e^{2in\pi y} - e^{-2in\pi y}) v(2\pi y) dy = 0, \quad \text{car } \frac{\pi}{i} \text{ est bornée.}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n(x) = \sin(nx)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2([0, 1])$.

2) Calculons $\int_0^1 \sin^2(nx) dx$.

$$\text{On a: } \int_0^1 \sin^2(nx) dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}.$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers 0.

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers 0, c'est à dire que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - 0\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = 0.$$

Donc on calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|$.

On a:

$$\|u_n\|^2 = \int_0^1 |u_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \sin^2(nx) dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{4n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}.$$

$$\text{D'où, } \|u_n\| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{car } \sin(2n) \text{ est bornée et } \frac{1}{4n} \longrightarrow 0).$$

On conclut que la suite (u_n) ne converge pas fortement vers 0.

Fin