



LUGARES DE VENTA

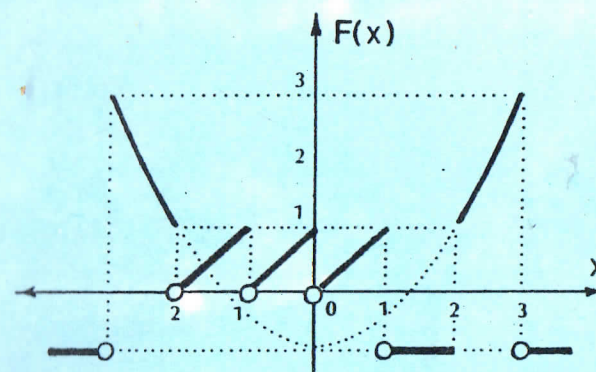
- UNI : Feria de Libros (frente Puerta 3 Univ.)
 Pabellón "J" - Facultad de Ing. Mecánica.
- UNFV : Librería "Choches" (fac. Ing. Industrial)
- UNMSM : Librerías del Módulo de Ciencias
- UNAC : Librería "Arapa" (frente fac. Electrónica)
- UPRP : Librería "Irene" (frente entrada posterior)
 Librería "Gloria" (frente entrada posterior)
- U.LIMA : Librerías frente al Campus Universitario
- ... Y en los diferentes establecimientos de las Universidades:
 PUCP-UNA-UPSMP-UNSA-LA CANTUTA... y otras.

p.p

Matemáticas

Funciones

Máximo Entero



Dominio • Rango • Gráfica

Funciones especiales

Algebra de funciones

Composición de funciones

Función inversa

Alonso ★ ★ ★

1994

$\phi 3.00$ IC
- 1 -

PROLOGO

En la presente publicación les ofrecemos una serie de problemas seleccionados correspondientes al capítulo de " FUNCIONES " , propuestos en las diferentes facultades de la Universidad Nacional de Ingeniería.

En su totalidad , los problemas que mostramos son la aplicación de la teoría correspondiente al capítulo mencionado, que se imparte en las aulas de los Centros de Estudios Superiores de nuestro Sistema Universitario.

Las dificultades son mostradas en forma progresiva y las soluciones son planteadas del modo más didáctico posible a fin de que el lector pueda entender fácilmente éste capítulo, que es indispensable para el dominio de temas posteriores tales como: límites, derivadas, integrales, etc.

Expresamos nuestro sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la presente publicación.

LOS AUTORES.

CONTENIDO

- * Dominio, rango y gráfica de una función.
- * Funciones Especiales :
 - o Función Máximo Entero
 - o Función Valor Absoluto
 - o Función Raíz Cuadrada
 - o Función Cuadrática
 - o Función Signo.
 - o Función Par
 - o Función Impar
 - o Función Periódica
 - o Funciones trigonométricas
- * Álgebra de Funciones: Suma, Resta, Multiplicación y División.
- * Composición de Funciones.
- * Función Inversa.

IMPORTANTE

QUEDA TERMINANTEMENTE PROHIBIDO LA REPRODUCCION
TOTAL O PARCIAL DE LA PRESENTE PUBLICACION

PROBLEMA (UNI)

Hallar el dominio y el rango de las siguientes funciones :

a) $f(x) = \frac{8}{x^2 + 9}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

SOLUCION :

a) Por teorema: si $y < 0 \wedge x^2 \geq y \Rightarrow x \in \mathbb{R}$
 luego: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 9 \geq 9 > 0$, de donde :

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}, \therefore Df = \mathbb{R}$$

Rango:

$$x^2 + 9 \geq 9 > 0 \begin{cases} x^2 + 9 \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 9} \leq \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{8}{x^2 + 9} \leq \frac{8}{9} \quad (\alpha) \\ x^2 + 9 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 9} \geq 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2 + 9} \geq 0 \quad (\beta) \end{cases}$$

de (α) y (β) : $Rf = \left[-0, \frac{8}{9} \right]$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3 > 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow Df = \mathbb{R}$

Rango: adecuando: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} = 1 - \frac{2}{x^2 + 3}$, además :

$$x^2 + 3 \geq 3 > 0 \begin{cases} x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^2 + 3} \geq \frac{1}{3} \quad (\alpha) \\ x^2 + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 3} \geq 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^2 + 3} \leq 1 \quad (\beta) \end{cases}$$

de (α) y (β) :

$$1 - \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{2}{x^2 + 3} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow Rf = \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$$

c) Rango.- Acondicionando: $f(x) = 1 - (1-x)^2$, además :

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^2 \leq 1, \text{ luego:}$$

$$-1 \leq -(1-x)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - (1-x)^2 \leq 1$$

Teorema: si $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$, luego :

$$0 \leq \sqrt{1 - (1-x)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow Rf = [0, 1]$$

PROBLEMA (UNI)

Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 25} + 10}{x(\lfloor x + 4 \rfloor - 7)}$$

SOLUCION:

Por propiedad: $(\lfloor x + n \rfloor) = \lfloor x \rfloor + n, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$, luego:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 25} + 10}{x(\lfloor x \rfloor - 3)}, \text{ donde: } x^2 - 25 \geq 0 \wedge (x \neq 0, \lfloor x \rfloor - 3 \neq 0)$$

$$\Rightarrow |x| \geq 5 \wedge ((x \geq 0 \vee x < 0) \wedge (\lfloor x \rfloor \geq 3 \vee \lfloor x \rfloor < 3))$$

$$\Rightarrow (x \geq 5 \vee x \leq -5) \wedge ((x \geq 0 \vee x < 0) \wedge (x \geq 4 \vee x < 3))$$

$$\text{De donde: } Df = \langle -\infty, -5 \rangle \cup [5, \infty) \quad \text{Rpta.}$$

PROBLEMA (UNI)

Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+5)(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-6)}}$$

SOLUCION:

Se debe cumplir que:

$$\frac{(x+5)(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-6)} \geq 0 \quad \dots (\alpha)$$

Aplicamos la regla de los signos: igualamos a cero cada uno de los factores y llevamos los puntos hallados sobre una recta numérica. Damos un valor a x de tal manera que el signo de (α) no varíe y determinamos los respectivos signos de cada intervalo.

$$\begin{array}{ccccccccc} (-) & | & (+) & | & (-) & | & (+) & | & (-) & | & (+) \\ \hline & -5 & & -2 & & 2 & & 4 & & 6 & \end{array}$$

$$\text{De donde: } Df = [-5, -2] \cup \langle 2, 4 \rangle \cup \langle 6, \infty \rangle \quad \text{Rpta}$$

PROBLEMA (UNI)

Hallar el rango de la función:

$$f(x) = -\sqrt{2x - \sqrt{x}} \quad \text{si } \text{Dom } f = [1, 9]$$

SOLUCION:

$$\text{Transformando: } f(x) = -\sqrt{2x - \sqrt{x}} = -\sqrt{2\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)}$$

$$\text{Por dato: } 1 \leq x \leq 9 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \sqrt{x} - \frac{1}{4} \leq \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{16} \leq \left(\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \leq \frac{120}{16} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)} \leq \sqrt{15}$$

$$\therefore -\sqrt{15} \leq -\sqrt{2x - \sqrt{x}} \leq -1 \Rightarrow Rf = [-\sqrt{15}, -1] \quad \text{Rpta}$$

PROBLEMA (UNI)

Determinar el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{[3x-1]} - [2x-1]} + \frac{4\sqrt{1-x-21} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-1}}$$

SOLUCION:

Aplicando los teoremas para máximo entero, raíz par y valor ab. soluto, tendremos las restricciones siguientes:

$$([3x-1] - [2x-1] > 0) \wedge (1-x-21 \geq 0) \wedge (2-x \geq 0) \wedge (x^2-1 \geq 0)$$

$$\text{luego: } ([3x] > [2x]) \wedge (1-x-21 \leq 1) \wedge (x \leq 2) \wedge (|x| \geq 1)$$

$$(x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3}, \infty)) \wedge (1 \leq x \leq 3) \wedge (x \leq 2) \wedge (x \geq 1 \vee x \leq -1)$$

$$(x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3}, \infty)) \wedge (1 \leq x \leq 2) \wedge (x \geq 1 \vee x \leq -1)$$

$$(x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3}, \infty)) \wedge (1 \leq x \leq 2)$$

$$x \in [-1, 2] \Rightarrow Df = [1, 2]$$

Rpta.

PROBLEMA (UNI)

Hallar el dominio, rango y la gráfica de:

$$f(x) = |x| - [x]$$

SOLUCION:

Por definición de valor absoluto tendremos:

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{si } x \geq 0 \\ -x - [x] & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para $x \geq 0$:

$$\text{Si } x \in [0, 1) \Rightarrow f(x) = x$$

$$\text{Si } x \in [1, 2) \Rightarrow f(x) = x-1$$

$$\text{Si } x \in [2, 3) \Rightarrow f(x) = x-2$$

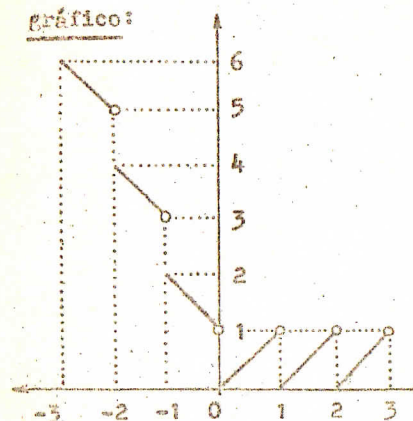
Para $x < 0$:

$$\text{Si } x \in [-1, 0) \Rightarrow f(x) = -x+1$$

$$\text{Si } x \in [-2, -1) \Rightarrow f(x) = -x+2$$

$$\text{Si } x \in [-3, -2) \Rightarrow f(x) = -x+3$$

gráfico:



$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = \{ [0, 1) \cup \langle 2n+1, 2n+2] \} \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

PROBLEMA (UNI)

Dada la función g de modo que:

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t-1}{t+1}$$

Dar el dominio, rango y bosquejar la gráfica de $g(t)$

SOLUCION:

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t-1}{t+1} = \frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} \Rightarrow g(t) = \frac{1-t}{1+t} \quad \text{de donde:}$$

$$1+t \neq 0 \Rightarrow 1+t > 0 \vee 1+t < 0 \Rightarrow Dg = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle$$

Cálculo del rango:

podemos escribir: $g(t) = \frac{2}{1+t} - 1$

Cálculo del rango:

Para $t > -1 \Rightarrow 1+t > 0 \Rightarrow \frac{2}{1+t} - 1 > -1 \Rightarrow R_{1g} = \langle -1, \infty \rangle$

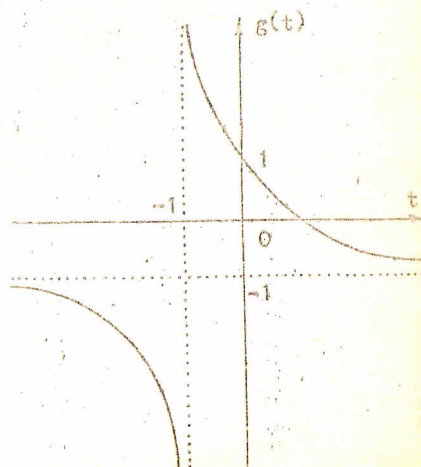
Para $t < -1 \Rightarrow 1+t < 0 \Rightarrow \frac{2}{1+t} - 1 < -1 \Rightarrow R_{2g} = \langle -\infty, -1 \rangle$

Por lo tanto $Rg = R_{2g} \cup R_{1g} = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle$

GRAFICA:

Tabulando:

t	g(t)	t	g(t)
0	1	-1.05	-41
1	0	-2	-3
3	-0.5	-5	-1.5
59	-0.96	-91	-1.02
99	-0.98	-501	-1.004
999	-0.99	-991	-1.0020



PROBLEMA (UNI)

Hallar la gráfica y rango de:

$$f(x) = \lfloor \cos x \rfloor, \quad x \in [0, 2\pi]$$

SOLUCION:

Desagregando el dominio tendremos:

1.- Si $x = 0 \Rightarrow \lfloor \cos 0 \rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

2.- Si $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -x < 0 \Rightarrow 0 < \cos x < 1$

$\Rightarrow \lfloor \cos x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

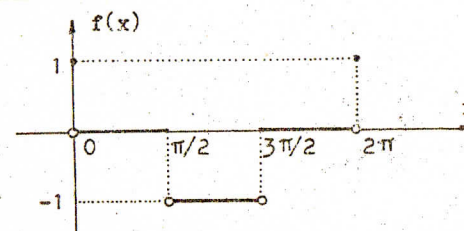
3.- Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow -\pi < -x < -\frac{\pi}{2}$
 $-1 < \cos x < 0 \Rightarrow \lfloor \cos x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = -1$

4.- Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 < \cos x < 0$
 $\Rightarrow \lfloor \cos x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = -1$

5.- Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow 0 < \cos x < 1$
 $\Rightarrow \lfloor \cos x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

6.- Si $x = 2\pi \Rightarrow \lfloor \cos 2\pi \rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

GRAFICA:



$$Rf = \{-1, 0, 1\}$$

PROBLEMA (UNI)

Hallar el rango de la función f dada:

$$f(x) = x^2 \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor + 2 |x-3| \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \quad Df = [-6, 6]$$

SOLUCION:

Desagregando el dominio tendremos:



Analizamos en los intervalos comprendidos entre los múltiplos de 3 y 4:

$$\text{Si: } -6 \leq x \leq -4 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq -\frac{x}{4} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor = 1 \\ -2 \leq \frac{x}{3} \leq -\frac{4}{3} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -2 \\ -9 \leq x-3 \leq -7 \Rightarrow |x-3| = 3 \\ \text{En f: } f(x) = x^2 + 4x - 12 \end{array} \right.$$

$$\text{Si: } -4 < x < -3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} < -\frac{x}{4} < 1 \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor = 0 \\ -\frac{4}{3} < \frac{x}{3} < -1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -2 \\ -7 < x-3 < -6 \Rightarrow |x-3| = 3-x \\ \text{En f: } f(x) = 4x - 12 \end{array} \right.$$

$$\text{Si: } -3 \leq x < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq -\frac{x}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor = 0 \\ -1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -1 \\ -6 \leq x-3 < -3 \Rightarrow |x-3| = 3-x \\ \text{En f: } f(x) = 2x - 6 \end{array} \right.$$

Si: $x = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$

Si: $0 < x < 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4} < -\frac{x}{4} < 0 \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor = -1 \\ 0 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0 \\ \text{En f: } f(x) = -x^2 \end{array} \right.$$

Si: $3 \leq x \leq 4$

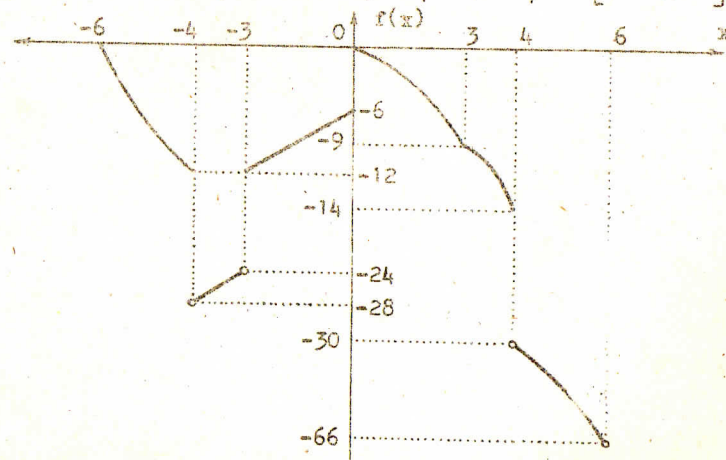
$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq -\frac{x}{4} \leq -\frac{3}{4} \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor = -1 \\ 1 \leq \frac{x}{3} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \\ 0 \leq x-3 \leq 1 \Rightarrow |x-3| = x-3 \\ \text{En f: } f(x) = -x^2 + 2x - 6 \end{array} \right.$$

Si: $4 < x < 6$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2} < -\frac{x}{4} < -1 \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{4} \right\rfloor = -2 \\ \frac{4}{3} < \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \\ 1 < x-3 < 3 \Rightarrow |x-3| = x-3 \\ \text{En f: } f(x) = -2x^2 + 2x - 6 \end{array} \right.$$

Del gráfico:

$Rf = \langle -66, -30 \rangle \cup \langle -28, -24 \rangle \cup [-14, 0]$



PROBLEMA (UNI)

• Redefiniendo $f(x)$, hallar su dominio y su gráfica:

$$f(x) = x \operatorname{Sgn} \left(\frac{x-1}{|x|-2} \right)$$

SOLUCION:

Por definición función signo:

$$\operatorname{Sgn} \left(\frac{x-1}{|x|-2} \right) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \frac{x-1}{|x|-2} > 0 \Rightarrow (x > 1 \wedge |x| > 2) \vee (x < 1 \wedge |x| < 2) \\ 0 & \text{Si } x = 1 \\ -1 & \text{Si } \frac{x-1}{|x|-2} < 0 \Rightarrow (x > 1 \wedge |x| < 2) \vee (x < 1 \wedge |x| > 2) \end{cases}$$

Resolviendo:

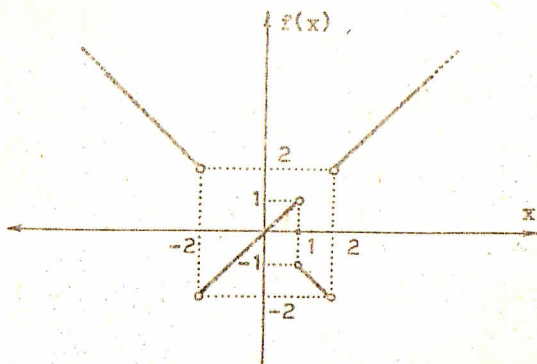
$$\operatorname{Sgn} \left(\frac{x-1}{|x|-2} \right) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle \\ 0 & \text{Si } x = 1 \\ -1 & \text{Si } x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = x \operatorname{Sgn} \left(\frac{x-1}{|x|-2} \right) = \begin{cases} x & \text{Si } x \in \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle \\ 0 & \text{Si } x = 1 \\ -x & \text{Si } x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

$$\text{Luego: } D_f = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$$

gráfica:



PROBLEMA (UNI)

Dada la siguiente función, indicar su dominio, obtener su rango y esbozar su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} & , x \in [-4, -1] \\ 3 + \operatorname{Sgn}(x+1) & , x \in [-1, 3] \\ |x-6| + 1 & , x \in [3, 9] \\ -2 & , x \in [9, 12] \end{cases}$$

SOLUCION:

Redefiniendo la función, tendremos:

PARA $x \in [-1, 3]$:

$$\operatorname{Sgn}(x+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ 0 & \text{si } x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ -1 & \text{si } x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

$$3 + \operatorname{Sgn}(x+1) = \begin{cases} 4 & , \text{ si } x \in \langle -1, 3 \rangle \\ 3 & , \text{ si } x = -1 \end{cases}$$

PARA $x \in [3, 9]$:

$$|x-6| = \begin{cases} x-6 & , \text{ si } x \geq 6 \Rightarrow x \in [6, 9] \\ 6-x & , \text{ si } x < 6 \Rightarrow x \in [3, 6] \end{cases}$$

$$\therefore |x-6| + 1 = \begin{cases} x-5 & , \text{ si } x \in [6, 9] \\ 7-x & , \text{ si } x \in [3, 6] \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)}, & \text{si } x \in [-4, -1] \\ 3, & \text{si } x = -1 \\ 4, & \text{si } x \in (-1, 3) \\ 7 - x, & \text{si } x \in [3, 6] \\ x - 5, & \text{si } x \in [6, 9] \\ -2, & \text{si } x \in [9, 12] \end{cases}$$

$$\therefore Df = [-4, 12]$$

Cálculo del rango:

Para $x \in [-4, -1]$:

$$-4 \leq x \leq -1 \Rightarrow -5 \leq (x+1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(x+1) \leq 5$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 - \sqrt{-\frac{4}{3}(x+1)} \leq 2$$

de donde: $R_1 f = [0, 2]$

Para $x = -1$: $R_2 f = \{3\}$

Para $x \in (-1, 3)$: $R_3 f = \{4\}$

Para $x \in [3, 6]$: $\Rightarrow 3 \leq x \leq 6 \Rightarrow -6 \leq -x \leq -3$

$$\Rightarrow 1 \leq 7 - x \leq 4 \Rightarrow R_4 f = [1, 4]$$

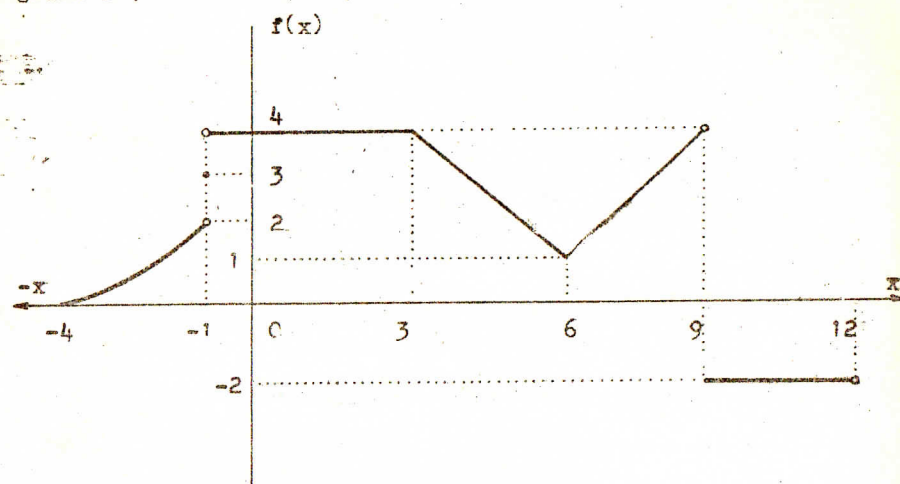
Para $x \in [6, 9]$: $\Rightarrow 6 \leq x \leq 9 \Rightarrow 1 \leq x - 5 \leq 4$

$$\therefore R_5 f = [1, 4]$$

Para $x \in [9, 12]$: $\Rightarrow R_6 f = -2$

luego: $Rf = \{-2\} \cup [0, 4]$

gráfica:



PROBLEMA (UNI)

Sea la función:

$$f(x) = ([3x] - 3[x]) \operatorname{sgn}(4 - x^2), \quad x \in (-2, 2)$$

Averiguar si:

- f es par o impar
- f es periódica. En caso afirmativo, determinar el periodo.

SOLUCION:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) En } -2 < x < 2 \text{ se cumple que: } [x] = [-x] \\ \text{En } -6 < 3x < 6 \text{ se cumple que: } [3x] = [-3x] \end{array} \right\} (\alpha)$$

Luego: $f(-x) = ([-3x] - 3[-x]) \operatorname{sgn}(4 - (-x)^2)$, de (α) :

$$f(-x) = ([3x] - 3[x]) \operatorname{sgn}(4 - x^2) = f(x); \text{ f es par.}$$

b) Para $x \in (-2, 2)$; $\operatorname{sgn}(4 - x^2) = 1$, por lo tanto:

$$f(x) = [3x] - 3[x]$$

CALCULO DEL PERIODO:

$$f(x + T) = [3x + 3T] - 3[x + T], \text{ donde } T \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow T = 1$$

$$f(x + 1) = [3x] + 3 - 3([x] + 1) = [3x] - 3[x] = f(x)$$

\therefore f es periódica. Periodo de f: $T = 1$ Rpta.

PROBLEMA (UNI)

Hallar los rangos de las funciones:

a) $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{|x^2 + 8|}} \right\rfloor, x \in [-1, 1]$

b) $g(x) = \begin{cases} \lfloor |8 - x^2| - 1 \rfloor, & x \in (-1, 8) \\ \lfloor 36 - x^2 \rfloor, & x \in (-5, -3) \end{cases}$

SOLUCION:

a) Redefiniendo la función f:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 8 \geq 8 > 0 \Rightarrow |x^2 + 8| = x^2 + 8, \text{ luego:}$$

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}} \right\rfloor, x \in [-1, 1]$$

Rango de f:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1, \text{ luego:}$$

$$8 \leq x^2 + 8 \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}} \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow \text{Rf} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{8}} \right)$$

b) Redefiniendo la función g:

PARA $-1 \leq x \leq 8$:

$$|8 - x^2| = \begin{cases} 8 - x^2, & \text{si } |x| \leq \sqrt{8} \Rightarrow x \in \langle -1, \sqrt{8} \rangle \\ x^2 - 8, & \text{si } |x| > \sqrt{8} \Rightarrow x \in \langle \sqrt{8}, 8 \rangle \end{cases}$$

Luego:

$$\lfloor |8 - x^2| - 1 \rfloor = \begin{cases} \lfloor 8 - x^2 - 1 \rfloor = \lfloor -x^2 \rfloor + 7; & x \in \langle -1, \sqrt{8} \rangle \\ \lfloor x^2 - 8 - 1 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor - 9; & x \in \langle \sqrt{8}, 8 \rangle \end{cases}$$

PARA $-5 \leq x \leq -3$:

$$3 \leq -x \leq 5 \Rightarrow 9 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow -25 \leq -x^2 \leq -9$$

$$\Rightarrow 11 \leq 36 - x^2 \leq 27 \Rightarrow \lfloor 36 - x^2 \rfloor = 36 - x^2$$

Por lo tanto:

$$g(x) = \begin{cases} \lfloor -x^2 \rfloor + 7, & \text{si } x \in \langle -1, 8 \rangle \\ \lfloor x^2 \rfloor - 9, & \text{si } x \in \langle \sqrt{8}, 8 \rangle \\ 36 - x^2, & \text{si } x \in \langle -5, -3 \rangle \end{cases}$$

Rango de g:

$$\text{Para } -1 \leq x \leq \sqrt{8} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 8 \Rightarrow -8 \leq -x^2 \leq 0$$

$$\text{de donde: } \lfloor -x^2 \rfloor = \{ -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1 \}$$

$$\therefore g_1(x) = \lfloor -x^2 \rfloor + 7 = \{ -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \quad (\alpha)$$

$$\text{Para } \sqrt{8} \leq x \leq 8 \Rightarrow 8 \leq x^2 \leq 64, \text{ de donde:}$$

$$\lfloor x^2 \rfloor = \{ 8, 9, 10, \dots, 63 \}$$

$$\therefore g_2(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 9 = \{ -1, 0, 1, 2, \dots, 54 \} \quad (\beta)$$

$$\text{Para } -5 \leq x \leq -3 \Rightarrow 11 \leq 36 - x^2 \leq 27 \Rightarrow 11 \leq g_3(x) \leq 27 \quad (\gamma)$$

De (α) , (β) y (γ) :

$$\text{Rg} = \langle 11, 27 \rangle \cup \{ -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 54 \}$$

Rpta.

PROBLEMA (UNI)

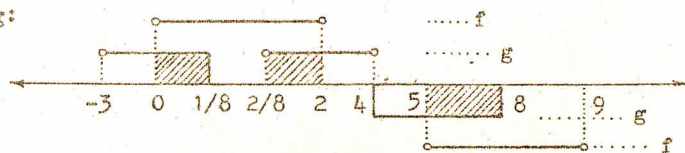
Determinar $f + g$, $f \cdot g$ f/g para:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & ; x \in \langle 0, 2 \rangle \\ x^2 + 1 & ; x \in \langle 5, 9 \rangle \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & ; x \in \langle -3, \frac{1}{8} \rangle \\ 2 - 5x & ; x \in \langle \frac{2}{8}, 4 \rangle \\ 2x & ; x \in [4, 8] \end{cases}$$

SOLUCION:

Primero determinamos cuales de los intervalos se intersectan y con las reglas de correspondencia (en los que exista intersección), se realizan las operaciones pedidas.

Di \cap Dg:



Luego:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 4x + 2 + \sqrt{x+4} & ; x \in \langle 0, 1/8 \rangle \\ 4 - x & ; x \in \langle 2/8, 2 \rangle \\ (x+1)^2 & ; x \in \langle 5, 8 \rangle \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} (4x+2) \sqrt{x+4} & ; x \in \langle 0, 1/8 \rangle \\ -20x^2 - 2x + 4 & ; x \in \langle 2/8, 2 \rangle \\ 2x^3 + 2x & ; x \in \langle 5, 8 \rangle \end{cases}$$

$$f(x)/g(x) = \begin{cases} (4x+2)/\sqrt{x+4} & ; x \in \langle 0, 1/8 \rangle \\ (4x+2)/(2-5x) & ; x \in \langle 2/8, 2/5 \rangle \cup \langle 2/5, 4 \rangle \\ (x^2+1)/2x & ; x \in \langle 5, 8 \rangle \end{cases}$$

Nota.- Cuando determinamos $f(x)/g(x)$, debemos de considerar - que $g(x) \neq 0$

PROBLEMA (UNI)

Sean las funciones:

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{25-x^2} & ; \text{si } -5 \leq x \leq -3 \\ |x-2| & ; \text{si } -3 \leq x \leq 5 \\ x^2/3 & ; \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 4 & ; \text{si } x \leq -2 \\ |4+x| & ; \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 8-2x & ; \text{si } 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Hallar las funciones $g + h$ y g/h

SOLUCION:

Redefiniendo las funciones:

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{25-x^2} & ; -5 \leq x \leq -3 \\ 2-x & ; -3 \leq x \leq 2 \\ x-2 & ; 2 \leq x \leq 5 \\ x^2/3 & ; x > 5 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 4 & ; x \leq -2 \\ 4+x & ; -2 \leq x \leq 2 \\ 8-2x & ; 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Dg \cap Dh:

